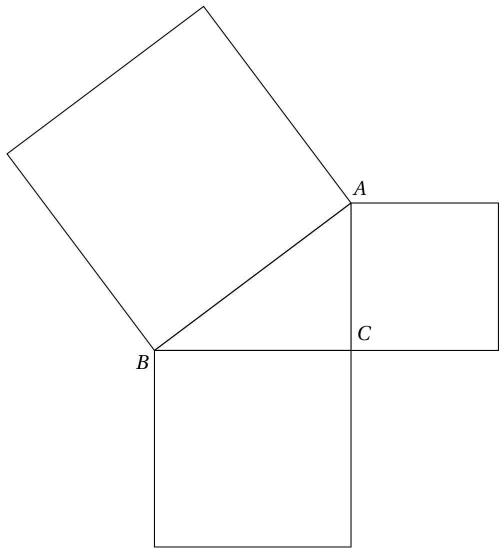
Une démonstration du théorème de Pythagore

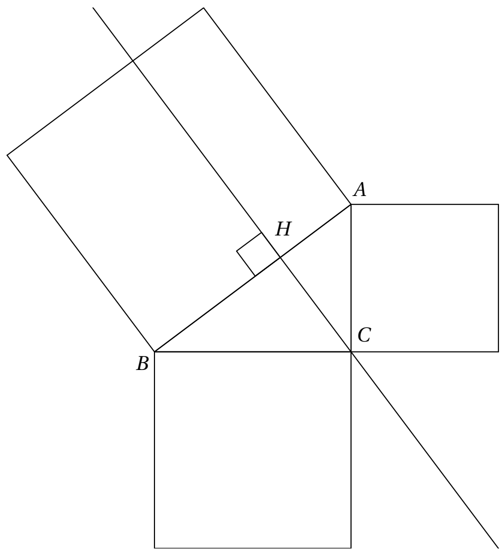
blogdemaths.wordpress.com

1 Principe de la démonstration

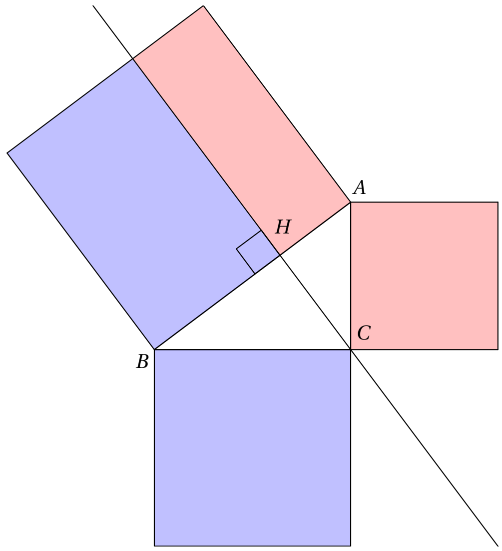
Soit ABC un triangle rectangle en C. Pour montrer que $AB^2 = AC^2 + BC^2$, il suffit de prouver que l'aire du carré reposant sur l'hypoténuse $[AB]$ est égale à la somme des aires des carrés reposants sur les deux autres côtés.



Pour cela, on commence par tracer la hauteur issue de C. Cette droite partage le carré situé sur l'hypoténuse en deux rectangles.



L'idée de cette démonstration va être de prouver que l'aire du premier rectangle est égale à l'aire du carré reposant sur le côté $[BC]$ et que l'aire du second rectangle est égale à l'aire du carré reposant sur le côté $[AC]$.



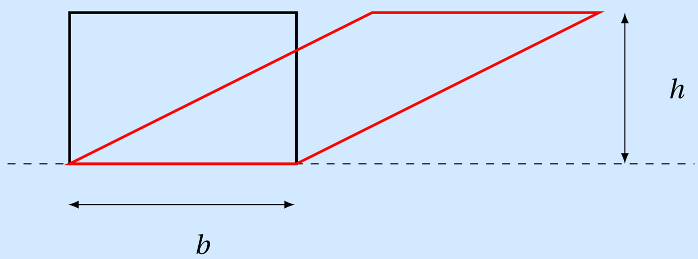
Autrement dit, on va montrer que les figures de même couleur sont de même aire.

2 Démonstration

1 — Rappel sur l'aire d'un parallélogramme

On sera amené à utiliser la petite propriété suivante :

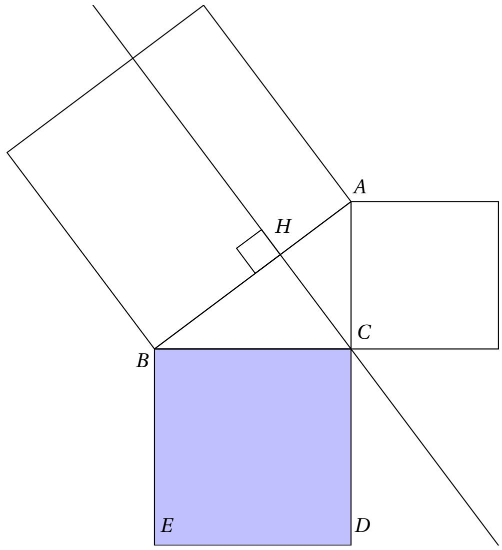
Lemme. Si un rectangle et un parallélogramme partagent un côté en commun et ont la même hauteur, alors ils ont même aire.



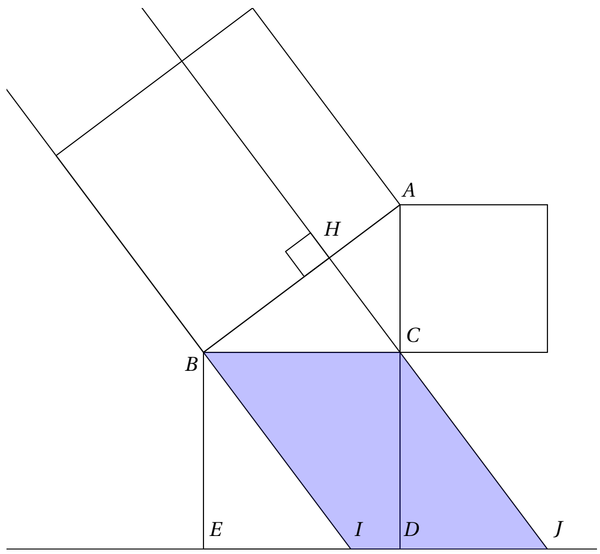
Cela vient du fait que l'aire d'un parallélogramme de base b et de hauteur h est $b \times h$, tout comme l'aire d'un rectangle.

2 — Déformation d'un carré en un parallélogramme de même aire

Partons de la figure suivante :



Traçons la parallèle à (HC) passant par B. Elle coupe la droite (ED) en un point I. De même, la droite (HC) coupe la droite (ED) en un point J.

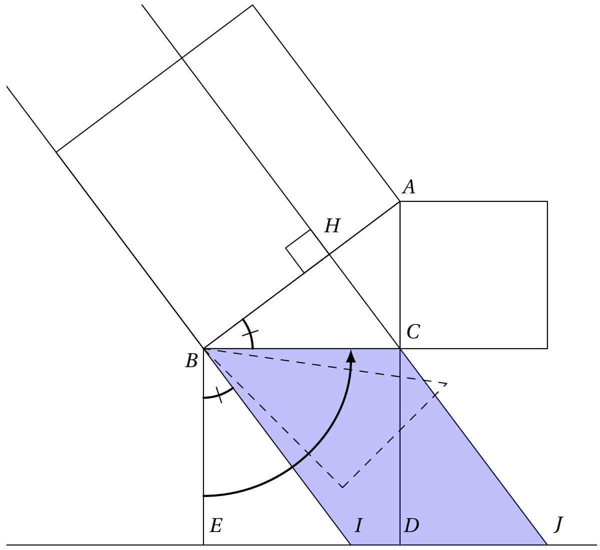


Par construction, les droites (BI) et (CJ) sont parallèles, tout comme les droites (BC) et (IJ). Ainsi, le quadrilatère $BIJC$ est un parallèlogramme. Ce parallélogramme a la même aire que la carré $BEDC$ car ces deux quadrilatères ont :

- même base, à savoir BC ;
- même hauteur, à savoir CD.

3 — Calcul du côté de ce parallélogramme

Nous allons prouver que la distance BI est égale à la distance AB. Pour cela, nous allons nous intéresser à la rotation r de centre B et d'angle 90° (dans le sens indirect).



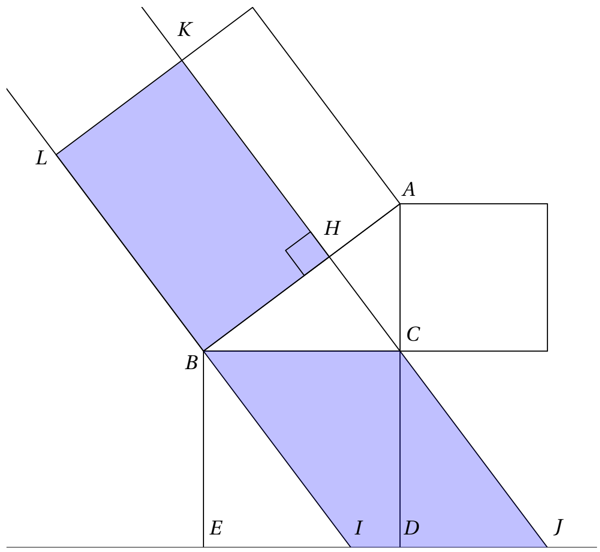
D'une part, cette rotation transforme E en C car

- $BE = BC$;
- l'angle $\widehat{EBC}$ vaut 90°.

D'autre part, elle transforme l'angle $\widehat{EBI}$ en l'angle $\widehat{CBA}$ car ces angles sont égaux. En effet, $\widehat{EBI} = \widehat{EBC} - \widehat{IBC} = 90° - \widehat{IBC}$ et $\widehat{EBI} = \widehat{IBA} - \widehat{IBC} = 90° - \widehat{IBC}$.

On en déduit que cette rotation transforme le triangle EBI en le triangle CBA. Par suite, on a $\boxed{BI = AB}$.

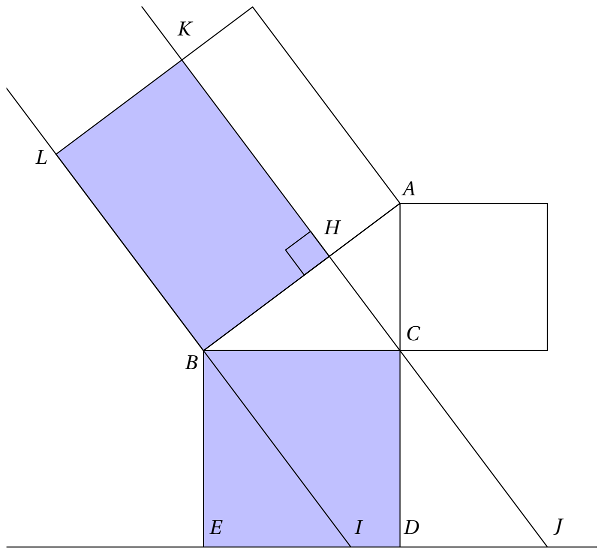
4 — Fin de la démonstration



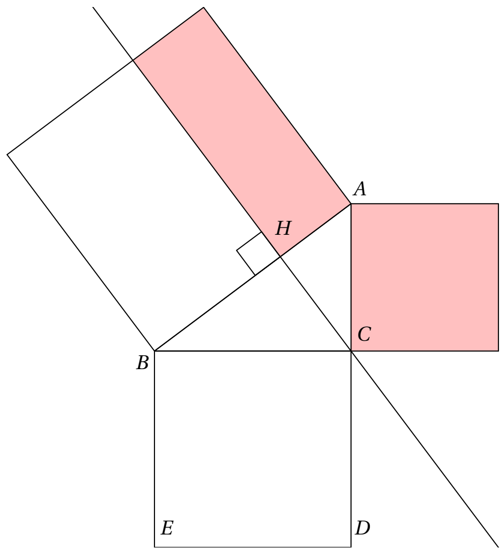
A partir de là, on constate que le rectangle $BHKL$ et le parallélogramme $BIJC$ ont la même aire. En effet, ils ont :

- même base car $LB = AB = BI$;
- même hauteur, à savoir BH.

Par transitivité, on a donc prouvé au final que les deux aires en bleu ci-dessous sont égales :



Un raisonnement analogue permettrait de démontrer que les aires en rouge ci-dessous sont égales :



Nous avons donc bien démontré le théorème de Pythagore !