Sur la somme des diviseurs des nombres composés sans facteur carré

blogdemaths.wordpress.com

1 Quelques rappels

1 — Nombres sans facteur carré

Définition. Un nombre est composé et sans facteur carré si :
- il n'est pas premier
- il s'écrit comme un produit de nombres premiers distincts

Autrement dit, un nombre composé est sans facteur carré s'il possède au moins deux facteurs premiers et qu'il n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier.

2 — Somme des diviseurs

Si N est un entier naturel, on note $\sigma(N)$ la somme de ses diviseurs positifs. On admet les deux propositions suivantes :

Proposition. Si p est un nombre premier alors

$$\sigma(p) = 1 + p$$

Proposition. Si n et m sont deux entiers premiers entre eux alors

$$\sigma(n \times m) = \sigma(n) \times \sigma(m)$$

2 Une condition nécessaire

Voici une condition nécessaire pour que la somme des diviseurs d'un nombre composé sans facteur carré soit elle aussi sans facteur carré.

Proposition. Soit N un nombre composé sans facteur carré.
Si la somme des diviseurs de N est un nombre sans facteur carré alors N est de la forme

$$N = 2 \times p$$

où p est un nombre premier impair tel que $p \equiv 1 \mod [12]$.

Démonstration. Comme N est composé et sans facteur carré, alors ce nombre est de la forme

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

où $n \geqslant 2$ et où les nombres premiers p_i sont distincts deux à deux. La somme de ses diviseurs est

$$\sigma(N) = \sigma(p_1) \times \sigma(p_2) \times \cdots \times \sigma(p_n)$$

donc

$$\sigma(N) = (1 + p_1) \times (1 + p_2) \times \cdots \times (1 + p_n)$$

S'il y avait au moins deux nombres premiers impairs dans la décomposition de N, disons p_i et p_j, alors $1 + p_i$ et $1 + p_j$ seraient tous deux des nombres pairs donc divisibles par 2. Cela entraînerait que $\sigma(N)$ serait divisible par $2 \times 2 = 2^2$ mais $\sigma(N)$ est supposé être sans facteur carré donc cela n'est pas possible. Ainsi, il ne peut y avoir qu'au plus un nombre premier impair dans la décomposition en facteurs premiers de N. Or, N est composé donc il possède au moins deux facteurs premiers distincts. Par suite, il possède exactement deux facteurs premiers : 2 et un autre facteur premier p impair. Le nombre N est donc bien de la forme $N = 2 \times p$.

Montrons à présent que p est congru à 1 modulo 12. Comme $N = 2 \times p$ alors

$$\sigma(N) = \sigma(2) \times \sigma(p) = 3 \times (1 + p)$$

Remarquons que, $\sigma(N)$ étant sans facteur carré, $1+p$ ne peut pas être divisible par 3 (car sinon $\sigma(N)$ serait divisible par 3^2). On a donc soit $1 + p \equiv 1 \mod [3]$, soit $1 + p \equiv 2 \mod [3]$. Si on avait $1 + p \equiv 1 \mod [3]$ alors on aurait $p \equiv 0 \mod [3]$ ce qui entraînerait que p est divisible par 3. Comme p est premier, cela voudrait dire que $p = 3$, ce qui donnerait $N = 2 \times 3 = 6$. Or, $\sigma(6) = 12 = 3 \times 2^2$ n'est pas sans facteur carré, donc ce cas est impossible. Nous avons donc nécessairement $1 + p \equiv 2 \mod [3]$ c'est-à-dire $p \equiv 1 \mod [3]$.

D'autre part, $1+p$ ne peut pas non plus être divisible par 4 car cela entrâinerait que $\sigma(N)$ est lui-même divisible par $4 = 2^2$. On en déduit que $1 + p \equiv 1, 2$ ou $3 \mod [4]$.

- Si on avait $1 + p \equiv 1 \mod [4]$ alors on aurait $p \equiv 0 \mod [4]$ ce qui voudrait dire que le nombre premier p est divisible par 4, ce qui est impossible.
- Si on avait $1 + p \equiv 3 \mod [4]$ alors on aurait $p \equiv 2 \mod [4]$, c'est-à-dire que p serait de la forme $p = 4k + 2$ et donc p serait un nombre premier impair divisible par 2... cela n'est pas possible non plus.

La seule possibilité est donc que $1 + p \equiv 2 \mod [4]$, c'est-à-dire $p \equiv 1 \mod [4]$.

Pour finir, on utilise le théorème des restes chinois : comme 3 et 4 sont premiers entre eux et puisque $p \equiv 1 \mod [3]$ et que $p \equiv 1 \mod [4]$, alors $p \equiv 1 \mod [3 \times 4]$ c'est-à-dire $p \equiv 1 \mod [12]$. CQFD.

□

Remarque. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante. Par exemple, si $N = 1154$ alors $N = 2 \times 577$ est un nombre composé sans facteur carré de la forme $2 \times p$ avec $p \equiv 1 \mod [12]$ $(577 = 48 \times 12 + 1)$. Pourtant, la somme des diviseurs de N n'est pas sans facteur carré car :

$$\sigma(1154) = 1 + 2 + 577 + 1154 = 1734 = 2 \times 3 \times 17^2$$